

Тема 1. Факториал. Элементы комбинаторики.

1. Факториал

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$1! = 1; 0! = 1$$

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)}_{(n-2)!} (n-1) n = (n-1)! \cdot n = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$$

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-2)(2n-1)(2n)$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$$

$$(2n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-2)(2n-1)$$

2. Элементы комбинаторики.

Пусть дано множество из n **различных** элементов. Из этого множества могут быть образованы подмножества из m элементов: $0 \leq m \leq n$. Если комбинации из n элементов по m элементов отличаются либо составом элементов, либо их расположением, либо и тем, и другим, то такие комбинации называют **размещениями из n элементов по m элементов**. Их число обозначают:

$$A_n^m$$

Для числа размещений справедлива формула:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1)$$

Если комбинации из n элементов по m элементов отличаются только составом элементов, то их называют **сочетаниями из n элементов по m элементов**. Их число обозначают C_n^m . Для числа сочетаний справедлива формула:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} \quad (2)$$

Если комбинации из n элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют **перестановками из n элементов**. Их число обозначают P_n . Для числа перестановок справедлива формула:

$$P_n = n! \quad (5)$$

Свойства числа сочетаний:

По определению $0!=1$, поэтому

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1; C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1. \quad (3)$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m}. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_n^m + C_n^{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-(m+1))!} = \frac{n!}{m!(n-(m+1))!} \left[\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1} \right] = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \cdot \frac{m+1+n-m}{(n-m)(m+1)} = \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = C_{n+1}^{m+1} \Rightarrow C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \end{aligned} \quad (5)$$

ПРИМЕР. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение. Каждый вариант расписания представляет собой набор 5 дисциплин из 11, отличающийся от других как составом дисциплин, так и порядком следования (или и тем, и другим). Имеет место размещение из 11 элементов по 5. Число вариантов определяем по формуле (1):

$$A_{11}^5 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440.$$

ПРИМЕР. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Решение. Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетание из 16 элементов по 2. Их число находим по формуле (3):

$$C_{16}^2 = \frac{15 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 120.$$

ПРИМЕР. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса. Т.е. имеем дело с перестановками. Их число – по формуле (5):

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Домашнее задание

1. Упростить:

а) $\frac{5!}{8!}$	б) $\frac{14!}{10!}$	в) $\frac{8!!}{8!}$	д) $\frac{7!}{7!!}$	е) $\frac{4!!}{3!!}$
ж) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$	з) $\frac{(2n-1)!}{(2n+2)!}$	и) $\frac{(2n)!}{(2n)!!}$	к) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!!}$	л) $2^n n!$

м) Укажите, сколькими нулями оканчивается число $100!$

2. Вычислить:

а) $\frac{P_5}{A_7^5}$	б) $\frac{C_6^3}{A_6^3}$	в) $\frac{C_8^6}{P_8}$	г) $\frac{A_{20}^4}{A_{20}^6 + A_{20}^5}$
------------------------	--------------------------	------------------------	---

д) $P_{n-2}A_{n+1}^3$	е) $\frac{P_{n+1}}{(n-k)!A_{n-1}^{k-1}}, k \leq n$	ж) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$	з) $\frac{A_{10}^7}{6!(C_7^5 + C_7^4)}$
-----------------------	--	------------------------------------	---

3. Решить уравнения и неравенства:

$$а) \frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240A_{n+3}^{k+3}$$

$$б) C_{n+3}^n - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$$

$$в) C_{10}^n > 2C_{10}^{n+1}$$

$$г) 4(n-2)!A_{n+2}^4 < 143n!$$

4. Решить задачи:

а) Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в различном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов?

б) Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся: а) четыре девушки; б) четыре юноши; в) три юноши и одна девушка?

в) Найти вероятность того, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, 3 определенные книги окажутся рядом.