

Тема 2. Метод математической индукции. Бином Ньютона.

1. Метод математической индукции

Для того чтобы доказать справедливость некоторого утверждения, можно использовать **метод математической индукции**. Он заключается в выполнении следующих шагов:

1. проверить справедливость утверждения при $n = 1$;
- 2а. предположить, что утверждение верно при $n = k$;
- 2б. доказать справедливость утверждения при $n = k + 1$, используя предположение 2а.

2. Бином Ньютона.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Треугольник Паскаля

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Примеры

1. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказательство.

1. Проверим справедливость формулы при $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

$$1 = 1 - \text{верно.}$$

2. Предположим, что утверждение верно при $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что оно верно при $n = k + 1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} \Rightarrow$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \quad (*)$$

Рассмотрим левую часть (*):

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 =$$

$$\underset{\text{по предположению}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k+1}{6} (k(2k+1) + 6(k+1)) =$$

$$= \frac{k+1}{6} (2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6).$$

Найдем корни квадратного трехчлена:

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1; \quad k_1 = \frac{-7-1}{4} = -2; \quad k_2 = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$2k^2 + 7k + 6 = 2(k+3) \left(k + \frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3).$$

Получим:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Полученное выражение совпадает с правой частью (*). Таким образом, утверждение доказано.

2. Доказать, что $\forall n \in N$ справедливо равенство:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1).$$

Доказательство.

1. Проверим справедливость формулы при $n = 1$:

$$1 \cdot 2 = 1^2(1 + 1)$$

$$2 = 2 - \text{верно.}$$

2. Предположим, что утверждение верно при $n = k$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + k(3k - 1) = k^2(k + 1).$$

Докажем, что оно верно при $n = k + 1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + (k + 1)(3(k + 1) - 1) = (k + 1)^2(k + 1 + 1) \Rightarrow$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + (k + 1)(3(k + 1) - 1) = (k + 1)^2(k + 2). \quad (*)$$

Рассмотрим левую часть (*):

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + (k + 1)(3(k + 1) - 1) \\ &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + k(3k - 1)) + (k + 1)(3(k + 1) - 1) = \\ & \underset{\text{по предположению}}{=} k^2(k + 1) + (k + 1)(3k + 2) = (k + 1)(k^2 + 3k + 2). \end{aligned}$$

Найдем корни квадратного трехчлена:

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1; \quad k_1 = \frac{-3 - 1}{2} = -2; \quad k_2 = \frac{-3 + 1}{2} = -1.$$

$$k^2 + 3k + 2 = (k + 1)(k + 2).$$

Получим:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + (k+1)(3(k+1)-1) = (k+1)(k+3k+2) \\ = (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2).$$

Полученное выражение совпадает с правой частью (*). Таким образом, утверждение доказано.

3. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} : 19.$$

Доказательство.

1. Проверим справедливость утверждения при $n = 1$:

$$5 \cdot 2^{3 \cdot 1 - 2} + 3^{3 \cdot 1 - 1} = 5 \cdot 2 + 3^2 = 19 : 19 - \text{верно.}$$

2. Предположим, что утверждение верно при $n = k$:

$$5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1} : 19$$

Докажем, что оно верно при $n = k + 1$:

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} : 19. \quad (*)$$

Рассмотрим левую часть (*) и выделим в ней выражение, соответствующее $n = k$:

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 5 \cdot 2^{3k+3-2} + 3^{3k+3-1} \\ = 5 \cdot 2^{3k-2} \cdot 2^3 + 3^{3k-1} \cdot 3^3 = 8 \cdot (5 \cdot 2^{3k-2}) + 27 \cdot 3^{3k-1} \\ = 8 \cdot (5 \cdot 2^{3k-2}) + 8 \cdot 3^{3k-1} + 19 \cdot 3^{3k-1} \\ = 8 \cdot (5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}.$$

Первое слагаемое кратно 19 по предположению, а второе кратно 19, так как в нем есть такой сомножитель. Следовательно, вся сумма кратна 19.

Домашнее задание

1. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

а) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

в) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

г) $n(2n^2 - 3n + 1) : 6$

д) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} : 11$

Задача 7. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Задача 8. Доказать, что

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Задача 9. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Задача 10. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$