

Тема 3. Метод математической индукции (продолжение)

1. Доказать:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ при } n > 1.$$

Доказательство.

1.

$$n = 1: 1! < \left(\frac{1+1}{2}\right)^1 \Rightarrow 1 < 1 - \text{неверно}$$

$n = 2$

$$2! = 2; \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow 2 < \frac{9}{4} - \text{верно.}$$

2а. $n = k$

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k - \text{верно} \Rightarrow 2^k k! < (k+1)^k - \text{верно}$$

2б. $n = k + 1$

$$(k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} - ? \quad (*)$$

Используем неравенство:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Найдем отношение в (*):

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)!}{\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}} &= \frac{k! \cdot (k+1) \cdot 2^k \cdot 2}{(k+2)^{k+1}} \underset{\text{по предположению}}{<} \frac{(k+1)^k \cdot 2 \cdot (k+1)}{(k+2)^{k+1}} = 2 \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)^{k+1}} \\ &< \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

2. Доказать:

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n \text{ при } n > 1.$$

Доказательство.

1.

$$n = 1: 2! < [(1 + 1)!]^1 \Rightarrow 2 < 2 - \text{неверно}$$

$$n = 2$$

$$2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48; [(2 + 1)!]^2 = 36 \Rightarrow 48 > 36 - \text{верно.}$$

$$2a. n = k$$

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! > [(k + 1)!]^k - \text{верно}$$

$$2б. n = k + 1$$

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k + 2)! > [(k + 2)!]^{k+1} - ? \quad (*)$$

Найдем отношение в (*):

$$\begin{aligned} & \frac{2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k + 2)!}{[(k + 2)!]^{k+1}} \\ &= \frac{2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot (2k + 2)!}{[(k + 2)!]^{k+1}} \underset{\text{по предположению}}{>} \frac{[(k + 1)!]^k \cdot (2k + 2)!}{[(k + 2)!]^{k+1}} \\ &= \frac{[(k + 1)!]^k \cdot (2k + 2)!}{[(k + 1)! (k + 2)]^{k+1}} = \frac{[(k + 1)!]^k \cdot (2k + 2)!}{[(k + 1)!]^{k+1} \cdot (k + 2)^{k+1}} \\ &= \frac{(2k + 2)!}{(k + 1)! (k + 2)^{k+1}} = \frac{(2k + 2)!}{(k + 1)! (k + 2)^{k1}} = \frac{(2k + 2)!}{(k + 2)! (k + 2)^k} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k + 2) \cdot (k + 3) \dots 2k \cdot (2k + 1) \cdot (2k + 2)}{(k + 2)! (k + 2)^k} \\ &= \frac{\overbrace{(k + 3)(k + 4) \dots 2k \cdot (2k + 1) \cdot (2k + 2)}^k}{\underbrace{(k + 2)(k + 2) \dots (k + 2)(k + 2)(k + 2)}_k} > \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_k = 1 \end{aligned}$$

3. Доказать:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n - 1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}.$$

Доказательство.

$$1. n = 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 1}} - \text{верно, так как } 2 > \sqrt{3}$$

$$2a. n = k$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k - 1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k + 1}} - \text{верно}$$

$$2б. n = k + 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} - ?$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \underset{\text{по предположению}}{<} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \underset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

Проверим:

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \underset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

Решим неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \xrightarrow{\text{все элементы } > 0!} \sqrt{2k+1} < \frac{2k+2}{\sqrt{2k+3}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1} < 2k+2 \Rightarrow 4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4 \text{ верно } \forall k \in N$$

4. Доказать:

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad \forall n \geq 2$$

Доказательство левой части.

1. $n = 2$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 > 2 - \text{верно, так как } \sqrt{2} > 1.$$

2а. $n = k$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} - \text{верно}$$

2б. $n = k + 1$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - ?$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{\text{по предположению}}{>} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{?}{\geq} \sqrt{k+1}$$

Проверим:

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{?}{\geq} \sqrt{k+1}$$

Решим неравенство:

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \xrightarrow{\text{все элементы } > 0!} \sqrt{k(k+1)} + 1 > k+1 \Rightarrow \sqrt{k(k+1)} > k$$

$$\Rightarrow k^2 + k > k^2 \Rightarrow k > 0 - \text{верно, так как } k \geq 2.$$

Доказательство правой части:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad \forall n \geq 2$$

1. $n = 2$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 < 4 - \text{верно, так как } \sqrt{2} < 3.$$

2а. $n = k$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - \text{верно}$$

2б. $n = k + 1$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - ?$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{\text{по предположению}}{<} 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \stackrel{?}{\leq} 2\sqrt{k+1}$$

Проверим:

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \stackrel{?}{\leq} 2\sqrt{k+1}.$$

Решим неравенство:

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \xrightarrow{\text{все элементы } > 0!} 2\sqrt{k(k+1)} + 1 < 2k + 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{k(k+1)} < 2k + 1 \Rightarrow 4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1 - \text{верно } \forall k.$$

5. Доказать:

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad \forall n \geq 3$$

Доказательство.

1. $n = 3$

$$3^4 = 81 > 4^3 = 64 - \text{верно.}$$

2а. $n = k$

$$k^{k+1} > (k+1)^k - \text{верно.}$$

2б. $n = k + 1$

$$(k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1} - ?$$

Найдем отношение:

$$\frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}} = \frac{(k+1)^k \cdot (k+1)^2}{(k+2)^{k+1}} <$$

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}} &= \frac{k^{k+1}(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}(k+2)^{k+1}} \underset{\text{по предположению}}{>} \frac{(k+1)^k(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}(k+2)^{k+1}} = \frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}} \\ &= \frac{[(k+1)^2]^{k+1}}{[k(k+2)]^{k+1}} = \left[\frac{k^2 + 2k + 1}{k^2 + 2k} \right]^{k+1} > 1. \end{aligned}$$

6. Доказать:

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

Доказательство.

1. $n = 1$

$$(2)! < 2^2(1!)^2 \Rightarrow 2 < 4 - \text{верно.}$$

2а. $n = k$

$$(2k)! < 2^{2k}(k!)^2 - \text{верно.}$$

2б. $n = k + 1$

$$(2k+2)! < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2 - ?$$

Найдем отношение:

$$\begin{aligned} \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}[(k+1)!]^2} &= \frac{(2k)!}{2^{2k+2}[(k+1)!]^2} \underset{\text{по предположению}}{<} \frac{2^{2k}(k!)^2(2k+1)(2k+2)}{2^{2k+2}[(k+1)!]^2} \\ &= \frac{(2k+1)(2k+2)}{2^2(k+1)^2} = \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 8k + 4} < 1. \end{aligned}$$

Домашнее задание

Доказать, что при каждом натуральном n верно неравенство.

$$1. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

$$2. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

3. Доказать, что при любом натуральном $n > 5$ верно неравенство:

$$2^n n! < n^n$$

4. При каких натуральных n верно неравенство:

$$2^n > n^3.$$

5. Доказать, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n \geq 1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

Это неравенство – неравенство Бернулли.