

Бином Ньютона.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad n \in N$$

Треугольник Паскаля

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
.....

Свойства.

1. Разложение бинома степени n содержит $n+1$ слагаемых.
2. Сумма показателей сомножителей каждого слагаемого равна n :

$$(n-k) + k = n.$$

3. Член разложения обозначается $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

$$4. (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad n \in N$$

При $x=1$ получим:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

При $x=-1$ получим:

$$(1-1)^n = 0 = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k.$$

Используем полученные соотношения в следующих примерах.

Пример 1. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2$.

Рассмотрим тождество $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Приравняв в этом тождестве коэффициенты при x^n , получим

$$C_n^n C_n^0 + C_n^{n-1} C_n^1 + \dots + C_n^{n-k} C_n^k + \dots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n.$$

На основе свойств числа сочетаний можно переписать: $\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Пример 2. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$.

Используя равенства

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1},$$

получаем

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

Пример 3.

Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2 .

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Общий член разложе-

ния десятой степени бинома $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид

$C_{10}^n \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$. Для того чтобы некоторый член этого разложения содержал x^2 , должно выполняться равенство

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^2.$$

Но $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^{5-\frac{n}{2}} \cdot x^{-\frac{n}{2}} = x^{5-n}$. Равен-

ство выполняется при $5-n=2$, т. е. при $n=3$.

При $n=3$ имеем $C_{10}^3 = 120$.

Таким образом, ответ $120x^2$

Домашнее задание.

Записать разложение бинома:

1. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 2. $\left(2a + \frac{1}{2}\right)^6$ 3. $(0,1b - 10)^7$

Найти член разложения бинома:

4. $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{16}$, содержащий $x^{-\frac{13}{12}}$

5. $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий x^{-1}

Найти коэффициент в разложении бинома:

6. $(1 - x + x^2)^3$ при x^3

7. $(1 + 2x - 3x^2)^4$ при x^3 и x^4

Найти наибольший коэффициент в разложении:

8. $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4$ 9. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$

Найти наибольший член разложения:

10. $(1 + \sqrt{2})^{30}$