

Математический анализ

Гендрина Ирина Юрьевна,

к.ф.-м.н.,

доцент кафедры прикладной математики,

ауд. 202

эл. почта igendrina@bk.ru

Среда электронного обучения **iDO (Moodle):**
Курс Математический анализ 1 курс 1 семестр

Математический анализ – раздел математики

Математика – наука-разведчик, брошенная человечеством на исследование мира в его возможных вариантах.

Иммануил Кант (1724-1804) Германия

**Математика – это искусство называть разные вещи
одинаковыми именами**

Анри Пуанкаре (1854-1912) Франция

**В то время как все другие науки принимают мир, каким
он есть, математика способна раскрывать, каким он
может быть.**

**Анатолий Константинович Сухотин (1922-2012) Россия,
ТГУ**

История математического анализа

Античность и метод исчерпывания

Зарождение идей о бесконечно малых
величинах и вычислении площадей/объёмов

Древняя Греция, III–II века до н.э.

Пример: Архимед доказал, что площадь сегмента параболы равна $\frac{4}{3}$ площади вписанного треугольника — по сути, первое вычисление определённого интеграла.

Ключевые учёные и вклад:

Евдокс Книдский — разработал метод исчерпывания (прообраз предельного перехода).

Архимед — вычислил площадь параболического сегмента, объём шара, число π с высокой точностью, фактически использовал идеи интегрирования.

Лю Хуэй, Цзу Чунчжи (китайские математики) — независимо применяли схожие методы для расчёта площадей и объёмов.

XVII век. Рождение анализа

Создание дифференциального и
интегрального исчисления как единой
системы

Англия и Германия, конец XVII века

Ключевые учёные и вклад:

Исаак Ньютон (1643–1727) — разработал «метод флюксий» (производные по времени), связал дифференцирование и интегрирование (основная теорема анализа). Использовал ряды для разложения функций.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — независимо создал анализ, ввёл современные обозначения дифференциала и интеграла, правила дифференцирования произведения и частного.

Пьер Ферма (1601-1665) — заложил основы нахождения экстремумов и касательных (до Ньютона и Лейбница).

XVIII век. Развитие и приложения

Бурное развитие техники вычислений, применение анализа к механике, физике, геометрии.

Европа (Швейцария, Франция, Германия)

Ключевые учёные и вклад:

Семья Бернулли — внесли вклад в вариационное исчисление, дифференциальные уравнения, теорию вероятностей; поставили задачу о брахистохроне.

Якоб Бернулли (1654–1705)

Иоганн Бернулли (1667–1748)

Даниил Бернулли (1700–1782)

Задача о брахистохроне (кривой быстрого спуска) привела к созданию вариационного исчисления — раздела анализа

Леонард Эйлер (1707–1783) — систематизировал анализ, ввёл понятие функции, развил теорию рядов, дифференциальных уравнений, вариационное исчисление. Создал обозначения $e, i, \pi, f(x)$.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) — разработал аналитическую механику, метод множителей для условного экстремума, теорию конечных разностей.

XIX век. Строгость и основания

Переход от интуитивного понимания
бесконечно малых к строгим
определениям предела, непрерывности,
интеграла

Франция, Германия

Ключевые учёные и вклад:

Огюстен Луи Коши (1789–1857) — ввёл строгое определение предела и непрерывности, построил теорию рядов, разработал определение интеграла как предела сумм.

Карл Вейерштрасс (1815–1897) — сформулировал определение предела на языке ε - δ , доказал многие теоремы о равномерной сходимости, показал существование непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции.

Бернхард Риман (1826–1866) — обобщил понятие интеграла (интеграл Римана), исследовал условия интегрируемости, заложил основы теории функций комплексного переменного.

Георг Кантор (1845-1918) — развил теорию множеств, необходимую для строгого обоснования анализа.

Математический анализ стал фундаментом всей математики, а не набором рецептов.

XX век. Современные обобщения. Лебег и теория меры

Расширение понятий интеграла и
функции, создание функционального
анализа

Франция, Россия, Польша

Ключевые учёные и вклад:

Анри Лебег (1875–1941) — ввёл понятие меры и интеграл Лебега, который позволил интегрировать более широкий класс функций и стал основой современной теории вероятностей.

Стефан Банах (1892-1945), **Давид Гильберт** (1862-1943) — развили функциональный анализ, где объектами изучения являются функции как точки бесконечномерных пространств.

Лоран Шварц (1915-2002) — создал теорию обобщённых функций (распределений), позволившую работать с дельта-функцией Дирака и решениями дифференциальных уравнений с разрывами.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) —
создатель неевклидовой геометрии.

Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) —
основатель петербургской математической школы;
теория чисел, теория вероятностей, теория
приближений.

Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891) —
первая в мире женщина-профессор математики;
дифференциальные уравнения, механика.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — теория вероятностей, функциональный анализ, топология, математическая логика, теория информации.

Сергей Львович Соболев (1908–1989) — функциональный анализ, обобщённые функции, математическая физика.

Лев Семёнович Понтрягин (1908–1988) — топология, теория оптимального управления.

Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009) — функциональный анализ, теория представлений, математическая физика.

Фёдор Эдуардович Молин (1861–1941) — первый профессор математики в Сибири, выдающийся алгебраист. Его работы по теории представлений конечных групп и теории чисел принесли мировой авторитет сибирской математической школе.

Николай Павлович Романов (1901–1967) — первый заведующий кафедрой алгебры ТГУ, известный специалист в области теории чисел и математического анализа, заложивший основы томской алгебраической школы.

Павел Парфеньевич Куфарев (1909–1968) — видный советский математик, специалист по теории функций комплексного переменного и гидродинамике, чьи результаты в области конформных отображений получили признание во всем мире.

Александр Фёдорович Терпугов (1939–2009) — выдающийся советский и российский математик, доктор физико-математических наук, профессор ТГУ и заслуженный деятель науки РФ. Он является основателем крупной сибирской научной школы в области прикладного вероятностного анализа.

Феликс Петрович Тарасенко (1932–2021) — выдающийся советский и российский ученый, математик, кибернетик, доктор технических наук и заслуженный профессор ТГУ. Он стал легендарной фигурой для университета как один из пионеров и главных популяризаторов системного анализа в СССР и России.

Его научный путь объединил фундаментальную математику, кибернетику и теорию управления, сделав ТГУ мощнейшим центром системного мышления.

Основные разделы

- Теория вещественных чисел
- Теория пределов
- Дифференциальное исчисление функции одной переменной
- Интегральное исчисление функции одной переменной
- Функции многих переменных. Теория неявных функций
- Классические задачи на безусловный и условный экстремум
- Ряды
- Интегралы, зависящие от параметра
- Криволинейные, кратные и поверхностные интегралы

Теория вещественных чисел.

Фундамент для вычислений. Понимание точности и ошибок округления

Компьютерные науки, криптография, финансовая аналитика.

Расчет комиссий (Gas) в сети Ethereum требует понимания структуры вещественных чисел с плавающей точкой, чтобы избежать потери микроцентов при конвертации токенов.

Как гарантировать, что сумма $0.1 + 0.2$ в коде будет равна 0.3 при расчете банковских транзакций без использования специальных библиотек?

Теория пределов

Поведение функции в крайних точках или при стремлении к бесконечности

Machine Learning, физика, эпидемиология

Обучение нейросетей: Метод градиентного спуска и исследование скорости сходимости (convergence rate) основаны на вычислении пределов последовательностей ошибок

Определить, достигнет ли ошибка распознавания лиц в системе безопасности порога в 0.001% при бесконечном времени обучения.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Скорость изменения процесса. Оптимизация

Экономика, логистика, производство

Электромобили: Оптимизация расхода батареи.

Скорость автомобиля влияет на расход энергии нелинейно.

Производная позволяет найти точку минимального потребления энергии на километр пути.

Интегральное исчисление функции одной переменной

Накопление величин, площадь под графиком
Физика, статистика, обработка сигналов

Медицина (МРТ/КТ): Восстановление изображения среза ткани происходит путем обратного преобразования Радона, которое математически сводится к вычислению сложных интегралов от проекций.

Найти суммарный заряд, накопленный солнечной панелью за облачный день, если график мощности известен.

Функции многих переменных. Теория неявных функций

Системы, где всё влияет на всё

3D-графика, термодинамика, эконометрика.

Компьютерное зрение: Поверхность дороги задается неявной функцией. Алгоритм SLAM использует частные производные (якобианы), чтобы понять, как движется камера в пространстве.

Определить, как связаны температура и давление в химическом реакторе (уравнение Ван-дер-Ваальса), если явно выразить давление нельзя. (Производная неявной функции).

Классические задачи на безусловный и условный экстремум

Поиск наилучшего решения при ограничениях
Логистика, управление проектами, инвестиции

Курьеру нужно развезти некоторое количество заказов, минимизировав время (безусловный экстремум), но у него есть жесткий лимит веса на спине (условный экстремум, метод множителей Лагранжа).

Распределить бюджет на рекламу в Telegram и YouTube так, чтобы получить максимум подписчиков, имея всего 1 млн рублей?

Ряды

Представление сложных функций простыми полиномами/гармониками

Сжатие данных, телекоммуникации

Сжатие изображений (JPEG) и звука (MP3): Ряды Фурье и косинусное преобразование позволяют отбросить высокие гармоники, которые не слышит/не видит человек, уменьшая размер файла в 10 раз без видимой потери качества.

Найти число членов ряда Тейлора, чтобы калькулятор вычислил $\sin x$ с точностью до 15 знаков после запятой для инженерного приложения?

Интегралы, зависящие от параметра

Анализ семейств решений и чувствительности
результата к входным данным

Финансовая математика, теория управления,
квантовая механика

Справедливая цена опциона зависит от волатильности
Дифференцирование под знаком интеграла используется для
расчета коэффициентов чувствительности цены к риску.

Криволинейные, кратные и поверхностные интегралы

Расчеты в сложной геометрии (2D/3D пространство),

потоки, площади и массы

Гидродинамика, электромагнетизм, компьютерная графика

Расчет подъемной силы крыла (поверхностный интеграл давления) или потока воздуха через сечение двигателя (криволинейный интеграл / формула Грина).

Определить, сколько тепла теряет жилой комплекс нестандартной архитектурной формы зимой? Нужно посчитать поток тепла через замкнутую поверхность. (Формула Остроградского-Гаусса).

Математический анализ — это не просто решение абстрактных примеров. Это язык, на котором описываются:

1. Алгоритмы ИИ (производные и пределы).
2. Цифровые технологии (ряды и сжатие).
3. Космос и транспорт (интегралы по поверхности).
4. Экономика и риски (экстремумы и параметры).

Структура и организация курса

3 семестра

В конце каждого семестра зачет и экзамен

В ведомость, которая прилагается к диплому, идет **последняя** оценка (за 3 семестр)

Во время семестра:

Домашние работы

Контрольные работы (практика)

Коллоквиумы (теория)

Работа на практике – оценивается как с плюсом, так и с минусом

Итоговая оценка (в зачетную книжку) формируется так:

Посещаемость (лекции, практики)	ДЗ	КР	Колл	Экзамен (теория)	Экзамен (задача)	Пларио (оценка)	Средняя оценка	Работа	Итоговая оценка
------------------------------------	----	----	------	---------------------	---------------------	--------------------	-------------------	--------	--------------------

Галилео Галилей

«Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную)., которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, который сначала научился постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики.»