

«Решение, найденное в результате собственных усилий, или то, с которым вы ознакомились по книге...может превратиться в метод, в образец, которому можно с успехом следовать при решении других задач»

Дьёрдь Пóйа (1887-1985)— венгерский, швейцарский и американский математик, популяризатор науки.

«Метод важнее знания»

Лев Давидович Ландау (1908-1968)— советский физик-теоретик, основатель научной школы, академик АН СССР. Лауреат Нобелевской премии по физике 1962 года.

Знание – удел сегодняшнего дня,...метод – приглашение идти в будущее.

Анатолий Константинович Сухотин

1. Множества и операции над множествами

1. Понятие множества. С конца 19 – начала 20 веков наиболее универсальным языком математики стал **язык теории множеств**.

«Под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различных объектов нашей интуиции или нашей мысли» - так описал понятие «множество» *Георг Кантор (1845-1918)*, немецкий математик, основатель теории множеств.

Основные предпосылки канторовской («наивной») теории множеств сводятся к следующему:

- множество может состоять из любых различных элементов;
- множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;
- любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если x - объект, P - свойство, то $P(x)$ - обозначение того, что x **обладает** свойством P .

Запись $\bar{P}(x)$ означает, что x **не обладает** свойством P .

Следующее символьное выражение $\{x | P(x)\}$ (или $\{x : P(x)\}$) обозначает **весь** класс объектов, обладающих свойством P .

Объекты, составляющие класс или множество, называются **элементами** класса или множества.

В наивной теории множеств слова «класс», «совокупность», «набор» употребляют как синонимы слова «множество».

Различие в возможной степени определенности задания множества наводит на мысль, что понятие множества не такое простое и безобидное понятие.

Например, понятие «**множество всех множеств**» просто **противоречиво!**

Действительно, пусть для множества M запись $P(M)$ означает, что M **не содержит себя** в качестве элемента. Рассмотрим класс $K = \{M | P(M)\}$ множеств, обладающих свойством P . Если K - множество, то либо верно, что $P(K)$, либо верно, что $\bar{P}(K)$. Однако эта альтернатива для K **невозможна!**

Действительно, $P(K)$ невозможно, так как из определения K тогда следовало бы, что K содержит K , то есть верно $\bar{P}(K)$. С другой стороны, $\bar{P}(K)$ также невозможно, поскольку это означает, что K содержит K , а это противоречит определению K как класса тех множеств, которые самим себя не содержат.

Следовательно, K - не множество.

Это классический парадокс Рассела — один из парадоксов, к которым приводит наивное представление о множестве.

Бертран Рассел (1872-1970) – английский логик, математик, философ, социолог и общественный деятель.

В современной математической логике понятие множества подвергается тщательному анализу. Для наших дальнейших рассуждений будем использовать аксиоматический подход к теории множеств, согласно которого множество – это математический объект, обладающий определенным набором свойств. Описание этих свойств составляет аксиматику теории множеств. В процессе рассуждений будем ссылаться на соответствующие аксиомы.

2. Отношение включения. Как уже отмечалось, объекты, составляющие множество, принято называть элементами. Принято сами множества обозначать прописными латинскими буквами, а их элементы – соответствующими строчными.

Утверждение « x есть элемент множества X » коротко записывают так:

$$x \in X .$$

Отрицание этого утверждения записывают так: $x \notin X$.

В записи высказываний о множествах используют логические операторы (кванторы) $\exists$ («существует» или «найдется») и $\forall$ («любой», «для любого», «для каждого»), называемые кванторами **существования** и **всеобщности** соответственно.

Запись $\forall x: (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$ обозначает, что для любого x соотношения $x \in A$ и $x \in B$ равносильны. Поскольку множество полностью определяется своими элементами, указанное высказывание принято обозначать коротко:

$$A = B \text{ («} A \text{ равно } B \text{»)}.$$

Аксиома 1 (аксиома объемности).

Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Это означает, что если мы желаем установить равенство двух множеств A и B , то мы должны проверить, что $\forall x: (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$.

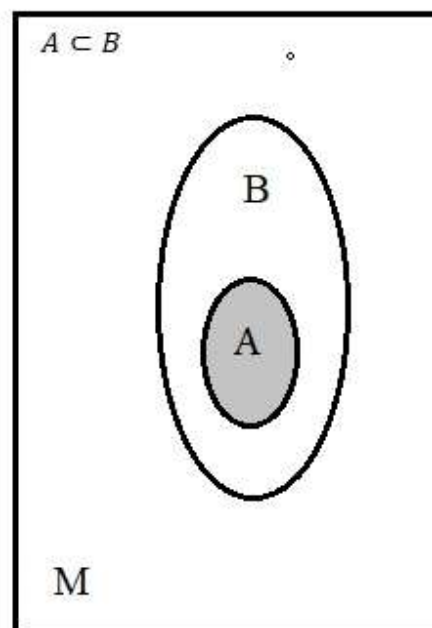
Отрицание равенства: $A \neq B$ (« A не равно B »).

Если любой элемент множества A является элементом множества B , то пишут $A \subset B$ и говорят, что множество A является **подмножеством** множества B , или что B содержит A , или что B включает в себя A . В связи с этим отношение $A \subset B$ называется **отношением включения**.

Заметим, что множества и отношения между ними удобно изображать с помощью **кругов Эйлера**.

Леонард Эйлер (1707-1783) — швейцарский, прусский и российский математик и механик, является одним из величайших математиков в истории.

Отношение включения:



Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то говорят, что включение **строгое** или что A - **собственное подмножество** множества B .

Используя приведенные определения, можно заключить, что

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \underset{''u''}{\wedge} (B \subset A).$$

Аксиома 2 (аксиома выделения).

Любому множеству A и свойству P отвечает множество B , элементами которого являются те и только те элементы множества A , которые обладают свойством P .

Например, очевидно, что

$$M = \{x \in M \mid x \in M\}.$$

С другой стороны, если в качестве P взять свойство, которым не обладает ни один элемент множества M , например $P(x) := (x \neq x)$, то получится множество следующего вида:

$$\emptyset = \{x \in M \mid x \neq x\},$$

Оно называется **пустым подмножеством** множества M .

Аксиома объемности позволяет заключить, что пустое множество единственно.

Аксиома 3 (аксиома объединения).

Для любого множества M , элементами которого являются множества, существует множество $\bigcup M$, называемое объединением множества M , состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в элементах множества M .

Аксиома 4 (аксиома пары).

Для любых множеств A и B существует множество C , такое, что A и B являются его единственными элементами.

Множество $C = \{A, B\}$ называется неупорядоченной парой.

Аксиома 5 (аксиома множества подмножеств).

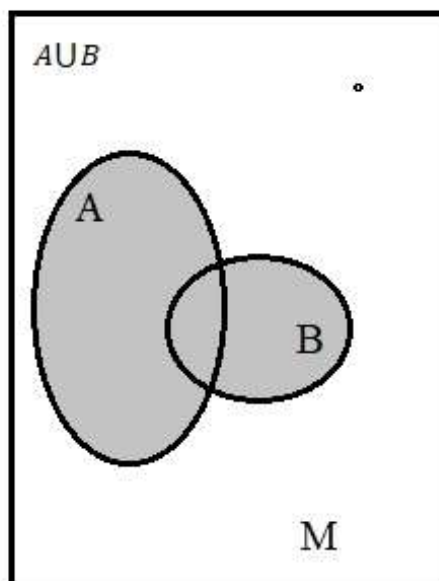
Для любого множества A существует множество $P(A)$, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются подмножествами множества A .

Аксиома говорит о том, что существует множество всех подмножеств данного множества.

3. Простейшие операции над множествами. Пусть A и B - подмножества множества M .

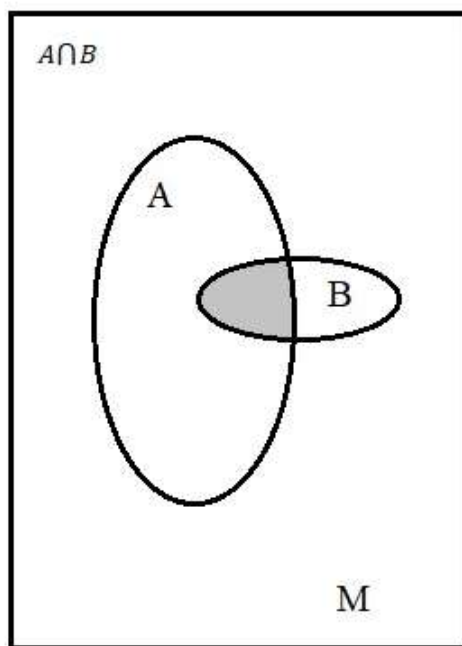
Определение. Объединение множеств A и B - это множество $C = A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов множества M , которые содержатся хотя бы в одном из множеств A или B :

$$C = A \cup B = \left\{ x \in M \mid (x \in A) \vee_{\text{"или"}} (x \in B) \right\}$$



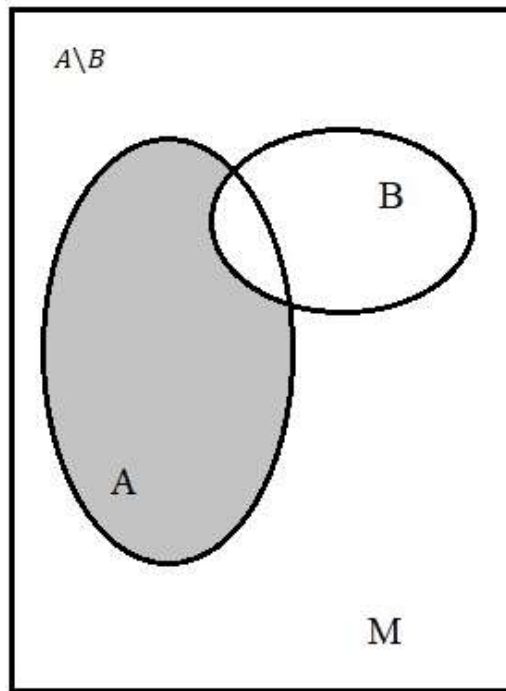
Определение. Пересечение множеств A и B - это множество $C = A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов множества M , которые содержатся одновременно и во множестве A , и во множестве B :

$$C = A \cap B = \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$



Определение. Разность между множеством A и множеством B - это множество $C = A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов множества M , которые содержатся во множестве A , но не содержатся во множестве B :

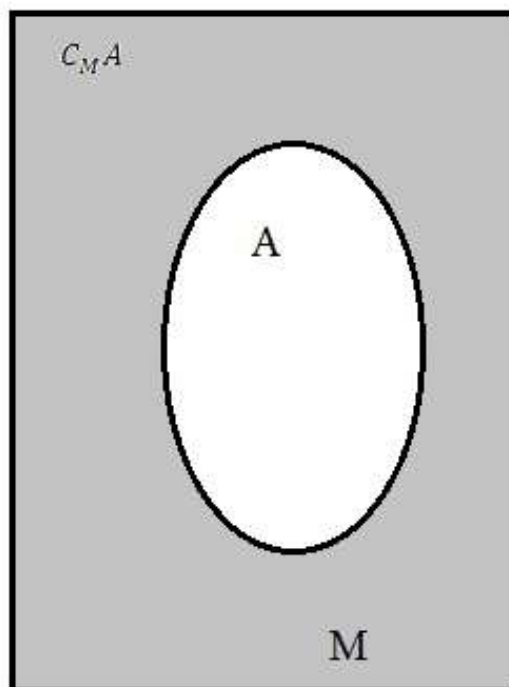
$$C = A \setminus B = \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$



Разность между множеством M и содержащимся в нем множеством A называется **дополнением A в M** или **дополнением A до M** :

$$C_M A = \bar{A} = M \setminus A = \{x \in M \mid (x \in M) \wedge (x \notin A)\}.$$

Очевидно: $\bar{\bar{M}} = \emptyset; \bar{\emptyset} = M$.



Законы (правила) де Моргана

**Август де Морган (1806-1871) - шотландский математик и логик, профессор математики в Университетском колледже Лондона*

$$1. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$2. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Доказательство. Докажем первое.

Воспользуемся аксиомой объемности:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Сначала докажем, что если $x \in \overline{A \cup B}$, то $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$:

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}) \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Теперь докажем, что если $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, то $x \in \overline{A \cup B}$:

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} \cap \bar{B} &\Rightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}. \end{aligned}$$

Первое правило доказано.

Второе доказать самим.

Определение. Прямое произведение множеств A и B — это множество упорядоченных пар (a, b) , первый элемент которых есть элемент из A , а второй — элемент из B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Из определения прямого произведения следует, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$. Равенство имеет место только тогда, когда $A = B$. В этом случае пишут: $A \times A = A^2$.

Прямое произведение называют также **декартовым** произведением в честь Рене Декарта, который пришел через систему координат к аналитическому языку геометрии. Известная нам система декартовых координат в плоскости превращает эту плоскость именно в прямое произведение числовых осей.

**Рене Декарт (1596-1650) – выдающийся французский философ, математик и физик.*

Свойства операций над множествами

(доказать с помощью аксиомы объемности или кругов Эйлера).

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap A = A$
7. $A \cup A = A$
8. $A \cup M = M$
9. $A \cap M = A$
10. $A \cup \emptyset = A$
11. $A \cap \emptyset = \emptyset$
12. $\bar{A} \cap A = \emptyset$
13. $\bar{A} \cup A = M$

Кроме того, можно обобщить свойства 5-6 и законы де Моргана на случай **конечного** числа множеств:

$$\left(\bigcup_i A_i \right) \cap B = \bigcup_i (A_i \cap B)$$

$$\left(\bigcap_i A_i\right) \cup B = \bigcap_i (A_i \cup B)$$

$$\overline{\left(\bigcup_i A_i\right)} = \bigcap_i \bar{A}_i$$

$$\overline{\left(\bigcap_i A_i\right)} = \bigcup_i \bar{A}_i$$

4. Отношение эквивалентности. Формализуем понятие отношения.

Пусть заданы множества A и B .

Отношением R между множествами A и B называется **любое упорядоченное множество пар** $\{(a, b): (a \in A) \wedge (b \in B)\}$, то есть отношение можно интерпретировать как прямое произведение множеств A и B .

Факт того, что множества A и B находятся в отношении R , записывают так:

$$(a, b) \in R \text{ или } a R b.$$

Отношение может обладать следующими свойствами:

1. пара $(a, a) \in R$ (рефлексивность);
2. если $(a, b) \in R$, то и $(b, a) \in R$ (симметричность);
3. если $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, то и $(a, c) \in R$ (транзитивность).

Если отношение обладает указанными свойствами, то оно является **отношением эквивалентности** и обозначается знаком « $\sim$ ».

2. Мощность множества. Счетные множества.

Пусть даны два множества A и B .

Определение. Правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие элемент множества B так, что **каждому** элементу множества B

оказывается поставлен в соответствие **один и только один** элемент множества A , называется **взаимно-однозначным соответствием** между множествами A и B .

Замечание. Взаимно-однозначное соответствие называют также **биективным отображением (биекцией)**.

Определение. Если между множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то говорят, что эти множества **эквивалентны по числу элементов** (имеют **одинаковую мощность**).

Обозначение: $A \sim B$.

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое число элементов (равномощны).

Класс, к которому принадлежит некоторое множество A , также называется **мощностью A** , или **кардиналом A** , или **кардинальным числом A** .

Обозначение: $\text{card } A$.

Если $A \sim B$, то $\text{card } A = \text{card } B$.

Определение. Множество, имеющее конечное число элементов, называется **конечным**.

Определение. Множество, имеющее бесконечное количество элементов, называется **бесконечным**.

Определение. Множество, эквивалентное множеству **натуральных чисел**, называется **счетным**.

Пусть дано бесконечное множество A .

Теорема 1. Для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его элементы можно было **занумеровать**, то есть представить в виде **последовательности**:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть множество A - счетно, то есть оно эквивалентно множеству N и существует правило, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между A и N . Пусть элементу $j \in N$ соответствует элемент $a_{k_j} \in A$: $j \leftrightarrow a_{k_j}$. Перенумеруем элементы множества A так, что $j \leftrightarrow a_j$. Таким образом, множество A может быть представлено в виде: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество A представлено в виде: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$. Установим взаимно однозначное соответствие с множеством N следующим образом.

A	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n	$\dots$
N	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$

По определению, множество A - счетно. Достаточность доказана.

Теорема 2. Из всякого бесконечного множества A можно выделить счетное подмножество.

Доказательство. Пусть A - бесконечное множество. Возьмем какой-либо элемент a_1 этого множества. Множество $A \setminus a_1$ по-прежнему будет бесконечным. Выберем из множества $A \setminus a_1$ произвольный элемент a_2 . Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ также остается бесконечным. Выберем из него элемент a_3 , получим бесконечное множество $A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. Продолжая этот процесс, выберем из бесконечного множества $A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}$ элемент a_n . Будем продолжать этот процесс, а из выбранных элементов составим множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$. Полученное множество B будет счетным

по теореме 1, так как оно представлено в виде последовательности. Теорема доказана.

Теорема 3. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Доказательство. Пусть A - счетное множество, а $B \subset A$ - его бесконечное подмножество. Представим A в виде последовательности и начнем перебирать его элементы по порядку: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. При этом мы будем «наталкиваться» на элементы множества B . Будем сопоставлять каждому такому элементу «номер встречи с ним». В результате все элементы B будут взаимно однозначно сопоставлены элементам множества натуральных чисел. Таким образом, по определению, множество B - счетно.

Теорема доказана.

Следствие. Если из счетного множества удалить конечное число элементов, то оно останется счетным.

Доказательство. Если из бесконечного множества удалить конечное число элементов, то получится подмножество, которое останется бесконечным. По условию следствия, исходное бесконечное множество является счетным. По теореме 3, получившееся бесконечное подмножество является счетным.

Теорема 4. Сумма (объединение) конечного и счетного множества есть счетное множество.

Доказательство основано на следствии теоремы 3.

Теорема 5. Сумма конечного числа счетных множеств есть счетное множество.

Доказательство.

Рассмотрим для простоты два счетных множества $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\}$.

Представим их сумму в виде:

$$C = A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n, \dots\}.$$

По теореме 1, множество C - счетное множество. Заметим, что среди элементов множеств A и B могут быть одинаковые. Удалив из множества C повторяющиеся элементы, получим бесконечное подмножество счетного множества, которое по теореме 3 будет счетным.

Теорема доказана.