

Теорема 6. Сумма счетного числа конечных множеств есть счетное множество.

Доказательство. Пусть дано счетное количество конечных множеств $A_i, i=1, 2, \dots$. Обозначим их элементы соответствующим образом:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}\}$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots, a_{m_2}^{(2)}\}$$

$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots, a_{m_3}^{(3)}\}$$

.....

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots, a_{m_n}^{(n)}\}$$

.....

Получим сумму этих множеств $\bigcup_i A_i$ следующим образом:

$$\bigcup_i A_i = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{m_2}^{(2)}, a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, \dots, a_{m_3}^{(3)}, \dots\}.$$

Элементы множества представлены в виде последовательности, значит, по теореме 1, множество является счетным. Удалим из множества повторяющиеся элементы (оставив по одному). Множество повторяющихся элементов может быть либо конечным, либо бесконечным. По теореме 3 и его следствию, бесконечное подмножество счетного множества является счетным.

Теорема доказана.

Теорема 7. Сумма счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

Доказательство. Пусть даны счетное количество счетных множеств $A_i, i=1, 2, \dots$. Обозначим их элементы соответствующим образом:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots\}$$

$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots\}$$

.....

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots\}$$

.....

Получим сумму этих множеств $\bigcup_i A_i$, используя метод диагонализации

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots\} \\ A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots\} \\ A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots\} \\ \dots\dots\dots \\ A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots\} \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

$$\bigcup_i A_i = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, \dots\}$$

Элементы множества представлены в виде последовательности, значит, по теореме 1, множество является счетным. Удалим из множества повторяющиеся элементы (оставив по одному). Таким образом, из счетного множества удалим счетное подмножество. Оставшееся подмножество также будет счетным по теореме 3.

Теорема доказана.

3. Свойства множества рациональных чисел

1. Основные определения. Вспомним некоторые обозначения:

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ - множество **натуральных** чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ - множество **целых** чисел:

$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; $Z_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Определение. Множеством **рациональных чисел** называется множество чисел следующего вида:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}.$$

2. Измерение отрезков числовой оси.

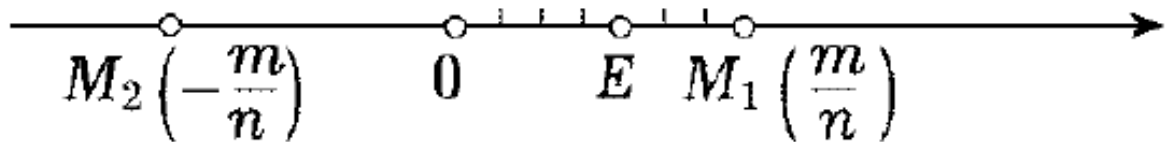
Определение. **Числовой осью** называется прямая, на которой выбраны определенная точка O (начало отсчета), масштабный отрезок OE (единичной длины) и положительное направление (слева направо от O к E).

Поставим в соответствие **каждой** точке M числовой оси некоторое **число**, выражающее длину отрезка OM . Это число будем считать **положительным**, если точки E и M лежат по одну сторону от O , и **отрицательным** – в противном случае.

Заметим, что **каждому целому числу** (точке M) на числовой оси соответствует определенная **точка**. Длина отрезка OM в этом случае – целое количество единичных отрезков.

Каждому рациональному числу на числовой оси также соответствует определенная точка, так как известен способ построения отрезка, длина которого составляет $\frac{1}{n}$ часть длины масштабного отрезка OE . Значит, можно

построить отрезок AB , длина которого относится к длине масштабного отрезка OE как $\frac{m}{n}$, где m и n - любые целые положительные числа.



Считая, что точка E лежит правее точки O и отложив отрезок AB вправо (влево) от точки O , получим точку M_1 (M_2), соответствующую рациональному числу $+\frac{m}{n}$ ($-\frac{m}{n}$).

Определение. Два отрезка называются **соизмеримыми**, если отношение их длин выражается рациональным числом, и **несоизмеримыми** – в противном случае.

Перечислим основные свойства рациональных чисел, которые вытекают из соответствующих свойств целых чисел и могут быть проиллюстрированы на числовой прямой. Фундаментальную роль среди свойств играют три правила: **правило сравнения, правило образования суммы и правило образования произведения.**

3. Свойства рациональных чисел.

1. Правило сравнения рациональных чисел.

Правило сравнения позволяет **упорядочить** множество рациональных чисел с помощью знака $>$ («больше»).

1.1. Для каждой пары рациональных чисел a и b имеет место одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a > b$ или $b > a$.

1.2. Из $a > b$, $b > c$ следует, что $a > c$ (**транзитивность**).

I.3. Если $a > b$, то найдется также такое число c , что $a > c$ и $c > b$ (свойство плотности).

Говорят, что $a < b$ («меньше») тогда и только тогда, когда $b > a$. Отношение $<$ также обладает отмеченными тремя свойствами I.1-I.3.

II. Сложение и вычитание рациональных чисел.

Определение. Для каждой пары рациональных чисел a и b существует единственное число, называемое **суммой** a и b : $a + b$.

Если $a = \frac{m_1}{n_1}$, а $b = \frac{m_2}{n_2}$, то $a + b = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$.

Это число обладает свойствами:

II.1 $a + b = b + a$ (**переместительное** свойство сложения);

II.2 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**сочетательное** свойство сложения).

Эти свойства легко проверяются на основании свойств дробей и аналогичных свойств для натуральных и целых чисел. Например:

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= \left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) + \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} + \frac{m_3}{n_3} = \\ &= \frac{m_1 n_2 n_3 + m_2 n_1 n_3 + m_3 n_1 n_2}{n_1 n_2 n_3} = \frac{m_1 n_2 n_3}{n_1 n_2 n_3} + \frac{m_2 n_1 n_3 + m_3 n_1 n_2}{n_1 n_2 n_3} = \\ &= \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2 n_1 n_3 + m_3 n_1 n_2}{n_1 n_2 n_3} = \frac{m_1}{n_1} + \left(\frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3} \right) = a + (b + c). \end{aligned}$$

II.3 существует число 0, обладающее свойством:

$a + 0 = a$ (**особое свойство нуля**);

II.4 для каждого числа a существует число $-a$ (**симметричное** или **противоположное**), такое, что $a + (-a) = 0$.

На основе этих свойств определяется операция **вычитания**, как действия, обратного сложению.

Определение. Разностью чисел a и b называется такое число c , для которого $c + b = a$.

Возникает вопрос о **существовании** и **единственности** такого числа.

Положим $c = a + (-b)$. Тогда:

$$c + b = (a + (-b)) + b \underset{\text{II.2}}{=} a + ((-b) + b) \underset{\text{II.4}}{=} a + 0 \underset{\text{II.3}}{=} a.$$

Значит, число $c = a + (-b)$ удовлетворяет определению разности.

Теперь пусть число c' также есть разность чисел a и b , так что $c' + b = a$.

Прибавим к обеим частям этого равенства число $(-b)$.

$$(c' + b) + (-b) = a + (-b). (*)$$

Получим слева:

$$(c' + b) + (-b) \underset{\text{II.2}}{=} c' + (b + (-b)) \underset{\text{II.4}}{=} c' + 0 \underset{\text{II.3}}{=} c'.$$

Справа имеем:

$$a + (-b) = c.$$

Из равенства (*) получим, что $c' = c$.

Таким образом, доказано существование и единственность разности чисел a и b , которое обозначается $a - b$.

Из единственности разности вытекает ряд следствий.

Из II.3 следует, что $0 = a - a$, значит, кроме числа 0 **не существует** числа, которое обладало бы свойством, аналогичным II.3.

Отсюда же вытекает единственность числа, противоположного данному:

$$-a = 0 - a.$$

Далее, из $a + (-a) = 0$ следует, что $(-a) + a = 0$ (II.1). Значит, $a = -(-a)$. Таким образом, числа a и $(-a)$ являются **взаимно противоположными (взаимно симметричными)**.

Установим еще одно свойство противоположных чисел:

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

Для этого докажем, что $(a + b) + ((-a) + (-b)) = 0$:

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) \underset{\text{II.1,2}}{=} (a + (-a)) + (b + (-b)) \underset{\text{II.4}}{=} 0 + 0 \underset{\text{II.3}}{=} 0.$$

II.5 Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

В соответствии с этим свойством имеем:

$$a > b \Leftrightarrow a + (-b) > b + (-b) = 0 \Leftrightarrow a - b > 0.$$

То есть неравенства $a > b$ и $a - b > 0$ - равносильны.

Кроме того:

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) - (-a).$$

Поскольку неравенства $a > b$ и $a - b > 0$ - равносильны, то из $a > b$ следует, что $(-b) - (-a) > 0 \Rightarrow -b > -a$, или, что то же самое, $-a < -b$.

Таким образом, если $a > b$, то $-a < -b$.

В частности, если $a > 0$, то $-a < 0$, а если $a < 0$, то $-a > 0$.

Если $a \neq 0$, то из двух взаимно противоположных чисел a и $-a$ одно и только одно будет больше нуля. Именно его и называют **абсолютной величиной (модулем)** как числа a так и числа $-a$.

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

Модуль нуля равен нулю: $|0| = 0$.

III. Умножение и деление рациональных чисел.

Определение. Для каждой пары рациональных чисел a и b существует **единственное** число, называемое **произведением** a и b : $a \cdot b$.

$$\text{Если } a = \frac{m_1}{n_1}, \text{ а } b = \frac{m_2}{n_2}, \text{ то } a \cdot b = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Это число обладает свойствами:

III.1 $a \cdot b = b \cdot a$ (**переместительное** свойство умножения);

III.2 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (**сочетательное** свойство умножения);

III.3 существует число 1, обладающее свойством: $a \cdot 1 = a$;

III.4 для каждого числа a существует число $\frac{1}{a}$ (**обратное**), такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

На основе этих свойств определяется операция **деления**, как действия, обратного умножению.

Определение. **Частным** двух чисел a и b ($b \neq 0$) называется такое число c , что $c \cdot b = a$.

Возникает вопрос о **существовании** и **единственности** такого числа.

Положим $c = a \cdot \frac{1}{b}$.

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot b \underset{\text{III.2}}{=} a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b \right) \underset{\text{III.4}}{=} a \cdot 1 \underset{\text{III.3}}{=} a.$$

Значит, $c = a \cdot \frac{1}{b}$ - частное чисел a и b .

Теперь пусть c' - еще одно частное, так что $c' \cdot b = a$. Умножим это равенство

на $\frac{1}{b}$:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad (**)$$

Слева имеем:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \stackrel{\text{III.2}}{=} c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b} \right) \stackrel{\text{III.4}}{=} c' \cdot 1 \stackrel{\text{III.3}}{=} c'$$

Справа имеем: $a \cdot \frac{1}{b} = c$.

В силу равенства (**) $c' = c$.

Таким образом, доказано существование и единственность частного чисел a и b , которое обозначается $\frac{a}{b}$.

Из единственности частного следует, что кроме числа 1 нет числа, которое обладало бы свойством, аналогичным III.3. Из этого следует единственность обратного числа; кроме того, легко установить, что числа a и $\frac{1}{a}$ являются **взаимно обратными**.

III.5 $(a + b) \cdot c = ac + bc$ (**распределительное** свойство умножения).

Отсюда легко получить распределительное свойство относительно разности:

$$(a - b) \cdot c = ac - bc.$$

Действительно, по определению разности:

$$(a - b) \cdot c + bc \stackrel{\text{III.5}}{=} ((a - b) + b) \cdot c = ((a + (-b)) + b) \cdot c \stackrel{\text{II.2}}{=} (a + (-b + b)) \cdot c \stackrel{\text{II.4}}{=} (a + 0) \cdot c \stackrel{\text{II.3}}{=} ac.$$

Докажем еще, используя свойство III.5, что $b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0$.

$$a + 0 \stackrel{\text{II.3}}{=} a; \quad (a + 0) \cdot b = ab + 0 \cdot b = ab \stackrel{\text{II.3}}{\Rightarrow} 0 \cdot b = 0 \stackrel{\text{III.1}}{\Rightarrow} b \cdot 0 = 0.$$

И обратно: если $ab = 0$ и $b \neq 0$, то $a = 0$.

Действительно: $a = \frac{0}{b}$, но одновременно $0 = \frac{0}{b}$. Значит, $a = 0$, так как частное единственно.

III.6 Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

На этом основано перемножение неравенств с положительными членами.

Отсюда же получается, что при $a > 0$ и $b > 0$ справедливо:

$$a \cdot b > 0.$$

III.7 Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Докажем, что $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Числа $a \cdot b$ и $-(a \cdot b)$ являются противоположными, поэтому в сумме дают 0:

$$a \cdot b + (-(a \cdot b)) = 0.$$

С другой стороны, $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$.

На основании двух последних равенств делаем вывод, что для $a > 0$ и $b > 0$

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

III.8 Оценим знак произведения $a \cdot b$.

Случай, когда $a > 0$ и $b > 0$, рассмотрен в III.6.

Рассмотрим случай, когда $a < 0$ и $b > 0$. В этом случае $a = -|a|, b = |b|$. Тогда:

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0.$$

Случай $a > 0$ и $b < 0$ приводит к аналогичному результату: $a \cdot b < 0$.

Пусть теперь $a < 0$ и $b < 0$. В этом случае $a = -|a|, b = -|b|$.

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot (-|b|) = -(|a| \cdot (-|b|)) = - (- (|a| \cdot |b|)) = |a| \cdot |b| > 0.$$

IV. Аксиома Архимеда.

Каково бы ни было число $c > 0$, существует, существует натуральное число $n > c$.

Это утверждение было изначально сформулировано Архимедом как геометрическое утверждение, которое и называлось «аксиомой Архимеда».

Если на прямой даны два любых отрезка A и B , то можно A повторить слагаемым столько раз, чтобы сумма была больше B :

$$\underbrace{A + A + A + \dots + A}_n = A \cdot n > B.$$

4. Счетность множества рациональных чисел

Теорема. Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Рассмотрим множество рациональных чисел в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{+1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{+2}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{+3}{1} & \frac{-3}{1} & \dots \\ \frac{+1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{+2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{+3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{+4}{2} & \dots \\ \frac{+1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{+2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{+3}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{+4}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Очевидно, что это множество содержит **все** рациональные числа, но в нем есть повторяющиеся элементы. Воспользуемся методом диагонализации:

0	$\frac{+1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{+2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{+3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	...
$\frac{+1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{+2}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{+3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{+4}{2}$	...
$\frac{+1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{+2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{+3}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{+4}{3}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

В результате множество может быть представлено в виде последовательности, значит, является счетным:

$$\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 1, 2, \dots\right\}.$$

Удалив из счетного множества счетное подмножество повторяющихся элементов, получим счетное множество, которое и является множеством рациональных чисел Q .

Теорема доказана.